

# אלגברה ליניארית ב

פרק 8 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

1. חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג ..... 1
2. חישוב דטרמיננטה כללית מסדר n ..... 6
3. חישוב דטרמיננטה לפי חוקי דטרמיננטות ..... 11
4. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 13
5. מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה ..... 14
6. שימושי הדטרמיננטה ..... 19
7. תרגילי תיאוריה מתקדמים ..... 20

## חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

### שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$(1) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

בשאלות 6-7 חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

$$(6) \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{7) א.}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{ג.}$$

בשאלות 8-10 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{8)}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{9)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{10)}$$

בשאלות 11-12 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{11) א.}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \end{array} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \quad \text{ב.} \quad \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{א. (12)}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{ד.} \quad \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \quad \text{בשאלות 13-15 נתון כי:}$$

חשבו:

$$\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad \text{(16) הוכיחו כי:}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{17) הוכיחו כי:}$$

$$\text{18) חשבו: } \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

19) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות  $A$  ו- $B$  מסדר  $n$  הנבדלות ביניהן רק בשורה ה- $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ).
- תהי  $C$  מטריצה הזוהה למטריצות  $A$  ו- $B$  אך נבדלת מהן בשורה ה- $k$ , שם היא שווה לסכום השורה ה- $k$  של  $A$  והשורה ה- $k$  של  $B$ .
- הוכיחו כי  $|A| + |B| = |C|$ .

$$\text{ב. חשבו: } \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) 9
- (5) 6
- (6) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (7) א. 24    ב. 44    ג. 104
- (8) 120
- (9) 114
- (10) 6
- (11) פתרונות באתר: [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (12) פתרונות באתר.
- (13) -8
- (14) 16
- (15) 9
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18)  $(k-1)^4 (k+4)$
- (19) א. שאלת הוכחה.    ב. 0

חישוב דטרמיננטה כללית מסדר  $n$ 

## שאלות

(1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j < n \\ a & 1 \leq i \leq n, j = n \\ a & 1 \leq j \leq n, i = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ב. עבור אילו ערכים של המספרים הממשיים  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{הפיכה:}$$

(2) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} j & i = j + 1 \\ n & i = 1, j = n \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

האם קיים ערך של  $n$  עבורו דרגת המטריצה קטנה מ- $n$ ?

(3) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j = 1 \\ 0 & i = j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:  $a_{ij} = |i - j|$ .

(5) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases}$$

(6) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 1$ :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & -3 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & -4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & 2n & \cdots & -n \end{vmatrix}$$

(7) חשבו את  $|A|$  כאשר המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \min\{i, j\} \quad \text{א.}$$

$$a_{ij} = \max\{i, j\} \quad \text{ב.}$$

(8) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{3(i-1), 3(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$ .

(9) המטריצה  $A = (a_{ij})$  נתונה על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} \min\{k(i-1), k(j-1)\} & 1 < i, j \leq n \\ 1 & i=1 \text{ or } j=1 \end{cases}$$

חשבו את  $|A|$  ומצאו עבור אילו ערכים של  $k$  המטריצה הפיכה.

(10) חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר  $n$ , כאשר  $n \geq 3$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 & 2 \leq i \leq n, j = 1 \\ 1 & 2 \leq j \leq n, i = 1 \\ x & \text{else} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & x & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x & \ddots & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(11) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:

$$a_{ij} = \begin{cases} ij & i \neq j \\ 1+ij & i = j \end{cases}$$

חשבו את  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

הערה: נפתור תרגיל זה בדרך אחרת בפרק על ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

$$(12) \text{ המטריצה } A = (a_{ij}) \text{ נתונה על ידי: } a_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i = j+1 \\ c & j = i+1 \end{cases}$$

א. מצאו נוסחת נסיגה לחישוב  $D_n = |A_{n \times n}|$ .

ב. הניחו כי  $a=3, b=1, c=2$  וחשבו:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה.

2. את הדטרמיננטה עבור  $n=20$ .

(13) נתונה מטריצה  $A_{n \times n}$ .

במטריצה זו מבצעים את פעולות השורה הבאות:

מחליפים בין השורה הראשונה לשורה האחרונה, בין השורה השנייה לשורה

הלפני אחרונה וכך הלאה, עד שלא ניתן יותר להחליף שורות.

בסוף התהליך מקבלים מטריצה  $B$ .

חשבו את  $|B|$  במונחי  $|A|$ .

$$(14) \text{ חשבו את } D_n = \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(15) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & & 1 \\ & \ddots & 2 \\ n & & 2 \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} i & i+j = n+1 \\ 2 & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

$$(16) \text{ חשבו את } D_n = \det \begin{pmatrix} a & & b \\ & \ddots & b \\ b & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ כאשר } n \geq 2 \text{ טבעי.}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} b & i+j = n+1 \\ a & \text{else} \end{cases} \text{ הערה:}$$

(17) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  הנתונה ע"י:

$$a_{ij} = \min\{i, n-j+1\}$$

$$\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n & x & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \quad (18) \text{ חשבו את הדטרמיננטה הבאה מסדר } n, \text{ כאשר } n \geq 2$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } |A| = a - (n-1)a^2 \quad \text{ב. } A \text{ הפיכה אם ורק אם } a_0 \neq 0.$$

$$(2) \quad \text{א. } (-1)^{n+1} n! \quad \text{ב. לא.}$$

$$(3) \quad |A| = n!$$

$$(4) \quad |A| = (-1)^{n+1} (n-1) 2^{n-2}$$

$$(5) \quad |A| = (a-b)^{n-2} [a + (n-1)b]$$

$$(6) \quad (-3)^{n-1} (2n-3) n!$$

$$(7) \quad \text{א. } |A| = 1 \quad \text{ב. } |A| = (-1)^{n+1} n$$

$$(8) \quad |A| = 2 \cdot 3^{n-2}$$

$$(9) \quad |A| = (k-1) \cdot k^{n-2} \text{ והמטריצה הפיכה אם ורק אם } k \neq 1 \text{ וגם } k = 0.$$

$$(10) \quad |A| = (-1)^{n-1} x^{n-2} (n-1)$$

$$(11) \quad D_n = 1 + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$(12) \quad \text{א. } D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-1}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$\text{ב.1. } D_n = 2^{n+1} - 1 \quad \text{ב.2. } D_{20} = 2^{21} - 1$$

$$(13) \quad |B| = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} |A| & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} |A| & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(14) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(15) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+2}{2}} 2(n-2)! & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2(n-2)! & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(16) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ even} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b-a)^{n-1} [b + (n-1)a] & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$(17) \quad D_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ odd} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2} + n-1} & n \text{ even} \end{cases}$$

$$(18) \quad D_n = \begin{cases} a_n (-1)^{\frac{n}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ even} \\ a_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} (x-a_1)(x-a_2) \cdots (x-a_{n-1}) & n \text{ odd} \end{cases}$$

## חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

### שאלות

בשאלות 1-2 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|B|=2$ ,  $|A|=4$ .  
חשבו:

1) א.  $|ABA^{-1}B^T|$       ב.  $|4A^2B^3|$

2) א.  $| -A^{-2}B^T A^3 |$       ב.  $| -2A^2 A^T \text{adj} B |$

3) נתון:  $(PQ)^{-1}APQ = B$ .  
הוכיחו:  $|A|=|B|$ .

4) נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .  
חשבו את  $|B|$ .

5) נתון:  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^2-2A^{-1}=0$ ,  $A+3B=0$ .  
חשבו את  $|A|$ ,  $|B|$ .

6) הוכיחו: 1.  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$       2.  $|\text{adj}(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$

7) נתון כי  $A$  מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.  
הוכיחו ש- $|A|=0$ .

8) נתון:  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A|=128$ ,  $2AB=B^T A^2$ , ו- $B$  הפיכה.  
מצאו את  $n$ .

9) נתון:  $\det(A_{n \times n})=2$ ,  $\det(B_{n \times n})=\frac{1}{3}$ .

חשבו:  $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$ .

$$(10) \text{ נתון } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי  $\det(M) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ .

### תשובות סופיות

(1) א. 4      ב.  $2^{13}$

(2) א. -8      ב.  $-2^{11}$

(3) שאלת הוכחה.

(4)  $\frac{81}{32}$

(5)  $|A|=18, |B|=-2/3$

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) 7

(9)  $4^n$

(10) שאלת הוכחה.

## כלל קרמר

## שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{lll} x+2z+5t=8 & x+z=3 & x+2y=5 \\ -2x-6y=-8 & 4x+y+8z=21 & 3x+4y=11 \\ 5x+3y-7z+4t=5 & 2x+3z=8 & \\ 2x+5y+44z=51 & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

$$kx+y+z+t+r=1$$

$$x+ky+z+t+r=1$$

$$(4) \quad \text{נתונה מערכת המשוואות: } x+y+kz+t+r=1$$

$$x+y+z+kt+r=1$$

$$, x+y+z+t+kr=1$$

א. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של  $k$  למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{2}$ ?

ג. האם קיים  $k$  עבורו למערכת פתרון יחיד שבו  $x = \frac{1}{5}$ ?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש-  
 $x=y=z=t=r$ .

(5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ .

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית  $Ax=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $A^2=0$ .

ב. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז  $|A|=0$ .

ג. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x=0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $|A|=0$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad x=1, y=2$$

$$(2) \quad x=1, y=1, z=2$$

$$(3) \quad x=y=z=t=1$$

$$(4) \quad \text{א. } k \neq 1, k \neq -4$$

$$\text{ב. } k = -2 \quad \text{ג. לא.} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(5) \quad \text{א. לא נכונה.} \quad \text{ב. לא נכונה.} \quad \text{ג. לא נכונה.}$$

## מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית  $adj(A)$ , ובעזרתה את  $A^{-1}$ :

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \text{נתון: } A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א. חשבו:  $(adj A)_{1,5}$ .

ב. חשבו:  $(A^{-1})_{1,5}$ .

(5) א. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה הפיכה  $A$  שווה ל- $\pm 1$ , כאשר כל איברי

$A$  ו- $A^{-1}$  הם מספרים שלמים.

ב. הוכיחו שאם  $|A|=1$  וכל איברי  $A$  הם מספרים שלמים,

אזי כל איברי  $A^{-1}$  גם הם מספרים שלמים.

(6) נתון ש- $A$  מטריצה משולשית תחתונה והפיכה.

הוכיחו ש- $A^{-1}$  משולשית תחתונה.

(7) נתון ש- $A$  הפיכה.

הוכיחו שגם  $adj(A)$  וגם  $A^T$  הפיכות.

(8) נתון כי  $A, B$  הפיכות ו- $C, D$  לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות?

א.  $C+D$     ב.  $A+B$     ג.  $AD$     ד.  $CD$     ה.  $AB$

9) מצאו את ערכי  $k$  עבורם המטריצה

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה.

10) ידוע ש- $A, B$  מטריצות ריבועיות מאותו סדר ו- $B \neq 0$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. אם  $AB=0$ , אז  $A=0$ .
- ב. אם  $|AB|=0$ , אז  $A=0$ .
- ג. אם  $|AB|=0$ , אז  $|A|=0$ .
- ד. אם  $AB=0$ , אז  $|A|=0$ .

11) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}$ ,  $B_{5 \times 3}$ . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א.  $|AB|=|BA|$
- ב.  $\text{adj}(AB) \neq \text{adj}(BA)$

12) אם  $B$  מתקבלת ממטריצה  $A_{3 \times 3}$  על ידי כפל העמודה הראשונה ב-4, אז  $|\text{adj}(A) \cdot B|$  שווה ל:

- א.  $4^3 |A|^3$
- ב.  $4^3 |B|^3$
- ג.  $4 |B|^3$
- ד.  $4 |A|^3$

13) נתונה מטריצה ריבועית  $A = (a_{ij})$  מסדר  $n \geq 3$  המקיימת  $a_{ij} = i + j - 1$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $|A| = 4$
- ב.  $A$  הפיכה.
- ג.  $\text{adj}(A) = 0$
- ד.  $|A| = 0$

14) אם  $G$  היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית  $A$ , אז :

- בהכרח  $\det(A) = \det(G)$  וגם  $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$ .
- בהכרח  $\det(A) = \det(G)$ , אך ייתכן ש  $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$ .
- ייתכן ש-  $\det(A) \neq \det(G)$ , אך בהכרח  $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$ .
- אף תשובה אינה נכונה.

15) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 2$ , כך ש-  $a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$ .

לכל  $1 \leq i, j \leq n$ , אז בהכרח מתקיים :

- $|A| = n! - 1$ .
- $A$  הפיכה.
- $\text{adj}(A)$  לא הפיכה.
- אם  $n = 4$ , אז  $|\text{Adj}(A)| > 214$ .

16) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 4$ .

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות :

- אם  $\text{rank}(A) = n - 2$ , אז בהכרח  $\text{adj}(A) = 0$ .
- אם  $A$  אנטי-סימטרית, אז בהכרח  $\text{adj}(A)$  אנטי-סימטרית.
- אם  $\text{adj}(A) = 0$ , אז בהכרח  $A = 0$ .

17)  $A$  מטריצה ריבועית,  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 4,

אז  $\text{adj}B$  מתקבלת מ- $\text{adj}A$  ע"י :

- הכפלת השורה הראשונה פי 4.
- הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 4.
- הכפלת העמודה הראשונה פי 4.
- הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 4.
- אף תשובה אינה נכונה.

18) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 5 המקיימת  $|\text{Adj}((-1+i)A)| = i$ .

חשבו  $|\det(A)|$ .

**19)** נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .  
הוכיחו את הטענות הבאות:

א.  $A$  הפיכה  $\Leftrightarrow Adj(A)$  הפיכה.

ב.  $Adj(A^{-1}) = (Adj(A))^{-1}$ .

ג.  $|Adj(A)| = |A|^{n-1}$ .

## תשובות סופיות

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{adj}(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(4) \quad \text{א. } 240 \quad \text{ב. } 0.5$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) א. לא ניתן לדעת. ב. לא ניתן לדעת. ג. לא הפיכה.

ד. לא הפיכה. ה. הפיכה.

(9) אם ורק אם  $k = 0$ .

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) ד

(13) שאלת הוכחה.

(14) ד

(15) ד

(16) שאלת הוכחה.

(17) ד

$$(18) \quad \frac{-5}{2^{\frac{1}{2}}}$$

(19) שאלת הוכחה.

## שימושי הדטרמיננטה

## שאלות

- (1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה :  
 1.  $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$   
 2.  $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$   
 ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו :  $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$   
 ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות :  $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$   
 ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו :  $(1,2), (3,4), (5,8)$   
 הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

## תשובות סופיות

- (1) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג.  $3x - y + 4z + 2 = 0$ . ד. 2

## תרגילי תיאוריה מתקדמים

## שאלות

(1) אם  $B$  מתקבלת ממטריצה  $A$   $3 \times 3$ , ע"י כפל העמודה הראשונה ב-7, אז  $|adj(A)B|$  היא:

א.  $|A|^3$

ב.  $|B|^3$

ג.  $|A||B|^2$

ד.  $|A|^2|B|$

(2)  $A, B$  מטריצות ריבועיות מאותו סדר,  $B \neq 0$ , אז:

א. אם  $AB = 0$ , אז  $A = 0$ .

ב. אם  $AB = 0$ , אז  $|A| = 0$ .

ג. אם  $|AB| = 0$ , אז  $A = 0$ .

ד. אם  $|AB| = 0$ , אז  $|A| = 0$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(3)  $B$  מטריצה  $5 \times 3$ ,  $A$  מטריצה  $3 \times 5$ , אז בהכרח:

א.  $\det(AB) = \det(BA)$

ב.  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$

ג.  $\text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$

ד.  $\text{adj}(AB) \neq \text{adj}(BA)$

ה. אף תשובה אינה נכונה.

(4)  $A$  מטריצה ריבועית,  $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י הכפלת השורה הראשונה פי 7, אז  $adjB$  מתקבלת מ- $adjA$  ע"י:

א. הכפלת השורה הראשונה פי 7.

ב. הכפלת כל שורה פרט לראשונה פי 7.

ג. הכפלת העמודה הראשונה פי 7.

ד. הכפלת כל עמודה פרט לראשונה פי 7.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

- 5) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . אז בהכרח מתקיים:
- אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $|A| = 0$ .
  - אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
  - אם למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
  - אם למערכת ההומוגנית  $(A^t)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז השורות של  $A$  תלויות ליניארית.
  - אף תשובה אינה נכונה.
- 6) תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממשיות מסדר  $n \geq 4$ . אזי בהכרח מתקיים:
- אם  $\text{rank}(A) = n - 2$ , אז בהכרח  $\text{adj}(A) = 0$ .
  - אם  $A$  אנטי-סימטרית, אז בהכרח  $\text{adj}(A)$  אנטי-סימטרית.
  - אם  $\text{adj}(A) = 0$ , אז בהכרח  $A = 0$ .
  - אף תשובה אינה נכונה.
- 7) תהא  $A = (a_{ij})$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 3$ , כך ש- $a_{ij} = i + j - 1$ . אז בהכרח מתקיים:
- $|A| = 2$ .
  - $|A| = 0$ .
  - עמודות  $A$  בלתי-תלויות ליניארית.
  - $\text{adj}(A) = 0$ .
  - אף תשובה אינה נכונה.
- 8) תהא  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 5, ונניח ש- $|\text{adj}((-1+i)A)| = i$ . אז הערך המוחלט של הדטרמיננטה שווה ל:
- $\sqrt[4]{2}$ .
  - $-3i$ .
  - 0.
  - $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .
  - אף תשובה אינה נכונה.

9) נניח  $A, B$  מטריצות מסדר גודל  $n \times n$  המקיימות  $A^2 - 2AB = I_n$ .  
אז בהכרח מתקיים:

א.  $B$  הפיכה.

ב.  $|A| = 0$ .

ג. למערכת  $ABx = 0$  פתרון יחיד.

ד.  $AB = BA$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

10) אם  $G$  היא הצורה המדורגת של מטריצה ריבועית  $A$ , אז:

א. בהכרח  $\det(A) = \det(G)$  וגם  $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$ .

ב. בהכרח  $\det(A) = \det(G)$ , אך ייתכן ש  $\text{adj}(A) \neq \text{adj}(G)$ .

ג. ייתכן ש-  $\det(A) \neq \det(G)$ , אך בהכרח  $\text{adj}(A) = \text{adj}(G)$ .

ד. אף תשובה אינה נכונה.

11) תהי  $A = (a_{ij})$  מטריצה ריבועית מסדר  $n \geq 2$ , כך ש-  

$$a_{ij} = \begin{cases} i & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

לכל  $1 \leq i, j \leq n$ , אז בהכרח מתקיים:

א.  $|A| = n! - 1$ .

ב.  $|A| \neq 0$ .

ג. עמודות  $A$  בלתי-תלויות ליניאריות.

ד.  $\text{adj}(A) = 0$ .

ה. אף תשובה אינה נכונה.

12) יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . אז בהכרח מתקיים:

א. אם למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $|A| = 0$ .

ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ ,

אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

ג. אם למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש-  $A^2 = 0$ .

ד. אם למערכת ההומוגנית  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז השורות

של  $A$  בלתי-תלויה ליניארית.

ה. אף תשובה אינה נכונה.

## תשובות סופיות

|       |      |      |       |       |
|-------|------|------|-------|-------|
| ב (5  | ד (4 | ד (3 | ב (2  | ד (1  |
| ד (10 | ד (9 | ד (8 | ב (7  | א (6  |
|       |      |      | ד (12 | ג (11 |